

Maximale Untermengenkörper

von

VOLKER MAMMITZSCH

München, Mai 1964



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Maximale Untermengenkörper

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Volker Mammitzsch
aus München

München, Mai 1964



Berichterstatter: Prof. Dr. H. Richter

Prof. Dr. E. Heinz

Mündliche Prüfung: 24. Juni 1964

Inhaltsverzeichnis

1. Bezeichnungen	S. 1
2. Definitionen und Problemstellung	S. 2
3. Die Gestalt maximaler Untermengenkörper	S. 4
4. Der Existenzsatz für maximale Unter- mengkörper	S. 6
5. Eine Verschärfung des Existenzsatzes	S.10
6. Anwendungen der Existenzsätze	S.12
7. Die Umkehrung der Problemstellung von 2.	S.18
8. Die Struktur von Erweiterungsmengenkörpern	S.20
9. Zusammenfassung	S.30
Literaturverzeichnis	S.31

1. Bezeichnungen:

Wir folgen in dieser Arbeit der Bezeichnungsweise von [2].

Es bedeutet $\emptyset$ die leere Menge.

Als Symbole für die mengentheoretischen Verknüpfungen benutzen

wir: $\bar{A}$ für das Komplement von A bezüglich einer vorgegebenen

Grundmenge M mit $A \subset M$;

$AB = A \cdot B$ bzw. ΠA_τ für den Durchschnitt von A und B bzw. der A_τ ;

$A+B$ bzw. ΣA_τ für die Vereinigung von A und B bzw. der A_τ ;

$A+B$ bzw. ΣA_τ für die Vereinigung, falls $AB = \emptyset$ bzw.

$A_\tau, A_{\tau''} = \emptyset$ für $\tau' \neq \tau''$.

$A^+B = A\bar{B} + \bar{A}B$ für den Unterschied von A und B;

$A-B = A^+B$, falls $A \supset B$.

Weiter definieren wir einige spezielle Mengensysteme:

$\mathcal{P}(M) := \{X: X \subset M\}$ ist die Potenzmenge von M;

$\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$ heißt Mengenkörper über der Grundmenge M, falls gilt:

a) $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

b) Mit $A \in \mathcal{K}$ ist $\bar{A} \in \mathcal{K}$.

c) Für $A, B \in \mathcal{K}$ gilt $A+B \in \mathcal{K}$.

Statt c) kann man auch verlangen

c') Für $A, B \in \mathcal{K}$ gilt $AB \in \mathcal{K}$;

$\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$ nennen wir einen σ -Körper, wenn $\mathcal{K}$ ein Mengenkörper

ist und zusätzlich die Bedingung

d) Aus $A_\tau \in \mathcal{K}$ folgt $\sum_{\tau=1}^{\infty} A_\tau \in \mathcal{K}$

erfüllt;

$K \mathcal{K}$ bzw. $B \mathcal{K}$ bezeichnet den kleinsten Mengenkörper bzw. σ -Körper über M, der ein vorgegebenes System $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M)$ enthält.

Schließlich benötigen wir die Mengensysteme

$$A^+ \mathcal{T} := \{ A^+ S : S \in \mathcal{T} \} \quad \text{und}$$

$A \mathcal{T} := \{ A S : S \in \mathcal{T} \}$. Ist $\mathcal{T}$ ein Mengenkörper über M , so ist $A \mathcal{T}$ ein Mengenkörper über AM .

2. Definitionen und Problemstellung:

(2.1.) Definition: Ein Mengenkörper $\mathcal{M}$ heißt maximal bezüglich eines anderen Mengenkörpers $\mathcal{K}$, wenn

- a) $\mathcal{K}$ und $\mathcal{M}$ Mengenkörper über derselben Grundmenge sind,
- b) $\mathcal{M}$ in $\mathcal{K}$ echt enthalten ist, d.h. $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K}$, und
- c) kein Mengenkörper $\mathcal{L}$ existiert, derart daß

$$\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{K} \quad \text{gilt.}$$

Wir wollen nun angeben, unter welchen Voraussetzungen solche Mengenkörper existieren. Dazu benötigen wir die folgende

(2.2.) Definition: Adjunktion eines Elementes A zu einem Mengenkörper $\mathcal{K}$ bedeutet Übergang von $\mathcal{K}$ zu ${}^K(\mathcal{K} \dot{+} \{A\})$.

Mit dieser Definition ist also $\mathcal{M}$ maximal bezüglich $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{M}$ und $\mathcal{K}$ Mengenkörper über derselben Grundmenge sind mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K}$ und für jedes A aus $\mathcal{K} - \mathcal{M}$ gilt: Adjunktion von A zu $\mathcal{M}$ ergibt $\mathcal{K}$. Für die Erfüllung der Bedingung (2.1.) genügt es nun keinesfalls zu zeigen, daß die Adjunktion eines geeigneten Elementes B aus $\mathcal{K} - \mathcal{M}$ bereits zu $\mathcal{K}$ führt. Dies ersieht man aus dem folgenden

(2.3.) Beispiel: $\mathbb{Z}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen. Mit $(-A)$ bezeichnen wir die Menge $\{-x : x \in A \subset \mathbb{Z}\}$ und setzen:

$$M := \mathbb{Z} + (-\mathbb{Z})$$

$$M := \{ A_1 + (-A_2) : A_1^+ A_2 \text{ enthält höchstens endlich viele Elemente; } A_1, A_2 \subset \mathbb{Z} \}.$$

Wir haben zu zeigen, daß M ein Mengenkörper über M ist.

In der Tat:

a) $\mathcal{M} \neq \emptyset$ ist trivial, da $Z + (-Z) = M \in \mathcal{M}$.

b) Sei $(A_1 + (-A_2)) \in \mathcal{M}$. Vereinbaren wir, daß $\bar{X}$ das Komplement von X bezüglich M und $\tilde{Y}$ das Komplement von Y bezüglich Z bedeutet, so ist

$$\overline{A_1 + (-A_2)} = \tilde{A}_1 + (-\tilde{A}_2) \in \mathcal{M}, \text{ da } \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = A_1 + A_2 \text{ endlich ist.}$$

c) Sei $(A_1 + (-A_2)), (B_1 + (-B_2)) \in \mathcal{M}$, dann ist

$$(A_1 + (-A_2)) \dot{+} (B_1 + (-B_2)) = (A_1 \dot{+} B_1) + (- (A_2 \dot{+} B_2)), \text{ wobei}$$

$(A_1 \dot{+} B_1) \dot{+} (A_2 \dot{+} B_2) \subset (A_1 + A_2) \dot{+} (B_1 + B_2)$. Wegen der Endlichkeit von $(A_1 + A_2)$ und $(B_1 + B_2)$ liegt also $(A_1 + (-A_2)) \dot{+} (B_1 + (-B_2))$ in $\mathcal{M}$.

Wir behaupten nun:

$$K(\mathcal{M} \dot{+} \{Z\}) = \mathcal{P}(M),$$

Wie sofort klar ist, gilt $K(\mathcal{M} \dot{+} \{Z\}) = \{ZA + (-Z)B : A, B \in \mathcal{M}\}$.

Sei $X = X_1 + (-X_2)$ ein beliebiges Element aus $\mathcal{P}(M)$. Wir setzen speziell $A := (X_1 + (-X_1))$ und $B := (X_2 + (-X_2))$, die beide in $\mathcal{M}$ liegen, und erhalten $X = X_1 + (-X_2) = ZA + (-Z)B \in K(\mathcal{M} \dot{+} \{Z\})$, was die Behauptung zeigt.

Um zu beweisen, daß $\mathcal{M}$ bezüglich $\mathcal{P}(M)$ nicht maximal ist, konstruieren wir einen Mengenkörper $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(M)$:

Sei C eine Teilmenge von Z derart, daß C und $\tilde{C}$ unendlich viele Elemente enthalten. C liegt daher nicht in $\mathcal{M}$. Wir setzen

$$\mathcal{L} := K(\mathcal{M} \dot{+} \{C\})$$

und zeigen, daß $\tilde{C}$ nicht in $\mathcal{L}$ enthalten ist. Wäre nämlich $\tilde{C} \in \mathcal{L}$, so gäbe es A und B aus $\mathcal{M}$ mit $C = \tilde{C}A + \tilde{C}B$.

O.B.d.A. dürfen $A = \emptyset$ annehmen und haben mit $B = B_1 + (-B_2)$

$$\tilde{C} = (\tilde{C} + (-Z)) \cdot (B_1 + (-B_2)) = \tilde{C} \cdot B_1 + (-B_2), \text{ woraus } B_2 = \emptyset \text{ und } B_1 \supset \tilde{C}$$

folgt. Dann wäre aber $B_1 \dot{+} B_2 = B_1$ nicht endlich im Widerspruch zu $B \in \mathcal{M}$. Es ist also, wie behauptet, $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(M)$.

Wir setzen noch fest: Ein Mengenkörper heißt trivial, wenn er nur aus der leeren Menge und der Grundmenge besteht. Damit formulieren wir den

(2.4.) Satz: Jeder nichttriviale Mengenkörper $\mathcal{K}$ über M enthält maximale Untermengenkörper.

Ehe der Beweis dieses Satzes geführt wird, sollen unter der Voraussetzung der Existenz Aussagen über die Gestalt solcher maximaler Untermengenkörper gewonnen werden.

3. Die Gestalt maximaler Untermengenkörper:

Sei $\mathcal{M}$ ein maximaler Untermengenkörper bezüglich $\mathcal{K}$ über der Grundmenge M und A ein im folgenden festgehaltenes Element aus $\mathcal{K} - \mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{K} = \{XA + Y\bar{A} : X, Y \in \mathcal{K}\}$.

Definiert man

(3.1.) Definition: Für $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(M)$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(M)$ und $XY = \emptyset$ für alle $X \in \mathcal{X}$ und $Y \in \mathcal{Y}$ sei

$$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} := \{X + Y : X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\};$$

so ist $\mathcal{K} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, wobei $\mathcal{A}_1 := A\mathcal{K}$ Mengenkörper über A und $\mathcal{A}_2 := \bar{A}\mathcal{K}$ Mengenkörper über $\bar{A}$ ist. Insbesondere sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Ringe bezüglich der Relation „ $+$ “ als additiver und der Relation „ $\cdot$ “ als multiplikativer Verknüpfung. Wir behaupten nun

(3.2) Hilfssatz: $\mathcal{P}_1 := \mathcal{A}_1\mathcal{M}$ ist ein Primideal in $\mathcal{A}_1$, das die Menge A nicht enthält.

Beweis: a) Aus $\emptyset \in \mathcal{A}_1$, $\emptyset \in \mathcal{M}$ folgt $\emptyset \in \mathcal{P}_1$, d.h. $\mathcal{P}_1$ ist nicht leer.

b) Sei $R, S \in \mathcal{P}_1$, also $R, S \in \mathcal{A}_1$ und $R, S \in \mathcal{M}$. Dann ist $(R^+S) \in \mathcal{A}_1$ und $(R^+S) \in \mathcal{M}$, mithin $(R^+S) \in \mathcal{P}_1$.

c) Für $R \in \mathcal{P}_1$ und $T \in \mathcal{A}_1$ gilt: $RT \in \mathcal{A}_1$ und $RT \in \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ maximal

bezüglich $\mathcal{K}$ und $A \notin \mathcal{M}$ ist, läßt sich schreiben: $RT = AV + \bar{A}W$ mit $V, W \in \mathcal{M}$. Daraus folgt vermöge $R \in A$: $RT = RRT = (RV)A = RV \in \mathcal{M}$, da $V, R \in \mathcal{M}$. Also haben wir $RT \in \alpha_1 \mathcal{M} = \mathcal{P}_1$.

Aus a), b), c) folgt, daß $\mathcal{P}_1$ ein Ideal in α_1 ist.

d) Sei weiter $T, U \in \alpha_1$ mit $T, U \notin \mathcal{P}_1$. Wir nehmen an, TU liege in $\mathcal{P}_1$. Aufgrund der Maximalität von $\mathcal{M}$ bezüglich $\mathcal{K}$ und wegen $T, U \in A$ folgt zunächst $T + \bar{T}X = A = U + \bar{U}Y$ mit geeigneten $X, Y \in \mathcal{M}$. Schnittbildung mit $\bar{A}$ und Beachtung von $\bar{T} \supset \bar{A}$, $\bar{U} \supset \bar{A}$ liefert $\bar{A}\bar{T}X = \bar{A}X = \emptyset = \bar{A}\bar{U}Y = \bar{A}Y$, d.h. $X \in A$ und $Y \in A$, bzw. $X, Y \in \alpha_1$. Mit $X, Y \in \mathcal{M}$ folgt schließlich $X, Y \in \mathcal{P}_1$.

Weiter folgert man aus $T + \bar{T}X = A = U + \bar{U}Y$ die Beziehung

$$\begin{aligned} A &= (T + \bar{T}X) \cdot (U + \bar{U}Y) = TU + T\bar{U}Y + \bar{T}XU + \bar{T}X\bar{U}Y = \\ &= TU + (T\bar{U})Y + (\bar{T}U) + (\bar{T}\bar{U}X) \cdot Y \in \mathcal{P}_1; \text{ denn es ist} \end{aligned}$$

$TU \in \mathcal{P}_1$ nach Annahme,

$T\bar{U} \in \alpha_1$ und $Y \in \mathcal{P}_1$, also $(T\bar{U})Y \in \mathcal{P}_1$,

$\bar{T}U \in \alpha_1$ und $X \in \mathcal{P}_1$, also $(\bar{T}U)X \in \mathcal{P}_1$,

$\bar{T}\bar{U}X \in \alpha_1$ und $Y \in \mathcal{P}_1$, also $(\bar{T}\bar{U}X)Y \in \mathcal{P}_1$.

Dann liegt A auch in $\mathcal{M}$, was zu $A \in \mathcal{K} - \mathcal{M}$ im Widerspruch steht.

$\mathcal{P}_1$ ist also ein Primideal, das wegen $A \notin \mathcal{M}$ die Menge A nicht enthält.

Genauso zeigt man, daß $\mathcal{P}_2 := \alpha_2 \mathcal{M}$ ein Primideal in α_2 ist mit $\bar{A} \notin \mathcal{P}_2$. Damit definieren wir

(3.3.) Definition: $f_i := \alpha_i - \mathcal{P}_i$ für $i = 1, 2$.

Die f_i sind Ultrafilter. Ganz allgemein gilt für Primideale in Mengenkörpern und die zugehörigen Ultrafilter der

(3.4) Hilfssatz: Sei $\mathcal{P}$ Primideal bezüglich des Mengenkörpers α über A' mit $\emptyset \neq \mathcal{P} \subsetneq \alpha$ und sei $f = \alpha - \mathcal{P}$. Dann gilt:

$$1.) \emptyset \in \mathcal{P} ; A' \in \mathcal{F}$$

$$2.) X \in \mathcal{F} \text{ gilt genau dann, wenn } A'-X \in \mathcal{P}.$$

Beweis: 1.a) Mit $X \in \mathcal{P}$ ist wegen $\emptyset \in \mathcal{A}$ auch $\emptyset X = \emptyset \in \mathcal{P}$.

b) Wäre $A' \in \mathcal{P}$, so müßte für jedes $X \in \mathcal{A}$ gelten $XA' = X \in \mathcal{P}$, also

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ sein, was der Voraussetzung $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{A}$ widerspricht.

2.) Mit $X, A'-X \in \mathcal{F}$ wäre infolge der Primidealeigenschaft auch

$X(A'-X) = \emptyset \in \mathcal{F}$ im Widerspruch zu 1.a). Andererseits wäre mit

$X, A'-X \in \mathcal{P}$ auch $X^+(A'-X) = A' \in \mathcal{P}$ entgegen der Aussage von 1.b).

Mit Hilfe der $\mathcal{P}_i$ und $\mathcal{F}_i$ ($i=1,2$) können wir $\mathcal{M}$ darstellen.

$$(3.5) \text{ Satz: } \mathcal{M} = (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2).$$

Beweis: a) Aus $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{M}$ folgt $(\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) \subset \mathcal{M}$.

b) Sei $X = F_1 + F_2 \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$, dann ist nach (3.4)

$\bar{X} = (A - F_1) + (\bar{A} - F_2) \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{M}$ und daher auch $X \in \mathcal{M}$. Also ist bereits gezeigt $(\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{M}$.

c) Um noch $\mathcal{M} \subset (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ zu erhalten, haben wir wegen

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{F}_1$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{K} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ nur zu zeigen, daß kein Element von $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ bzw. $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{F}_1$ in $\mathcal{M}$ liegt. In der Tat: Läge $X = P_1 + F_2$ für $P_1 \in \mathcal{P}_1$ und $F_2 \in \mathcal{F}_2$ in $\mathcal{M}$, so wäre $(\bar{A} - F_2) \in \mathcal{P}_2$ und $P_1 + (\bar{A} - F_2) \in \mathcal{M}$ und nach a) auch $\bar{A} = (P_1 + F_2)^+(P_1 + (\bar{A} - F_2)) \in \mathcal{M}$ im Widerspruch zu $A \in \mathcal{K} - \mathcal{M}$. Entsprechend schließt man die Möglichkeit $(\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{F}_1) \cap \mathcal{M} = \emptyset$ aus.

4. Der Existenzsatz für maximale Untermengenkörper:

Der Satz (3.5) zeichnet uns den Beweisgang zum Satz (2.4) vor:

Wir werden zunächst $\mathcal{K}$ zerlegen in $\mathcal{K} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ und in $\mathcal{A}_i$ je ein Primideal $\mathcal{P}_i$ sowie den zugehörigen Ultrafilter $\mathcal{F}_i$ ($i=1,2$) konstruieren. Abschließend werden wir zeigen, daß $\mathcal{M} := (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ maximaler Untermengenkörper bezüglich $\mathcal{K}$ ist.

Die Existenz solcher Primideale $\mathcal{P}_1$ wird durch Satz 3.5.5. aus [1], S.72 sichergestellt. Wir wollen diesen Satz in unserer Terminologie formulieren und einen etwas kürzeren Beweis geben, indem wir anstelle der transfiniten Induktion das Zornsche Lemma benutzen.

(4.1.) Hilfssatz: Sei $\mathcal{A}$ ein Mengenkörper und $\mathcal{I}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$.

Sei ferner $A' \in \mathcal{A}$ nicht in $\mathcal{I}$ enthalten. Dann existiert ein Primideal $\mathcal{P}$ in $\mathcal{A}$, das $\mathcal{I}$ umfaßt und A' nicht enthält.

Beweis: 1.) In der Gesamtheit aller Ideale in $\mathcal{A}$, die wohl $\mathcal{I}$, aber nicht A' enthalten, sei durch die Obermengenrelation " $\subset$ " eine teilweise Ordnung gestiftet. Nun betrachten wir eine Kette von Idealen $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \dots \subset \mathcal{I}_\tau \subset \dots$, die A' nicht enthalten. τ durchlaufe eine gewisse Indexmenge T , die gegebenenfalls nur die 1 enthält. Dann ist auch $\mathcal{I} := \sum_{\tau \in T} \mathcal{I}_\tau$ ein Ideal, das A' nicht enthält; denn für $S_1, S_2 \in \mathcal{I}$ gibt es ein $\mathcal{I}_\tau$ mit $S_1, S_2 \in \mathcal{I}_\tau$.

Die Anordnung ist daher induktiv, nach dem Zornschen Lemma gibt es also ein maximales Ideal $\mathcal{P}$, das $\mathcal{I}$ umfaßt und A' nicht enthält.

2.) Sei $\mathcal{I}'$ ein Ideal in $\mathcal{A}$ und B ein beliebiges Element aus $\mathcal{A}$. Bezeichnen wir mit $[\mathcal{I}', B]$ das kleinste Ideal in $\mathcal{A}$, das $\mathcal{I}'$ und B enthält, so gilt:

$$(4.2.) \quad [\mathcal{I}', B] = \{ X_1 + X_2 : X_1 \in \mathcal{I}', X_2 \in \mathcal{A} \text{ mit } X_2 \subset B \}$$

In der Tat umfaßt die rechte Seite $\mathcal{R}$ von (4.2.) $\mathcal{I}'$ und B und ist in $[\mathcal{I}', B]$ enthalten. Es genügt somit zu zeigen, daß $\mathcal{R}$ ein Ideal ist. Dies ist aber offensichtlich wegen

$$(X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2) = (X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) \text{ mit } (X_1 + Y_1) \in \mathcal{I}' \text{ und}$$

$x_2^+ y_2 \in B$; sowie $C(x_1^+ x_2) = Cx_1^+ Cx_2$ mit $Cx_1 \in J'$ und $Cx_2 \in I_2 \subset B$ für beliebiges $C \in \mathcal{A}$.

3.) Wir zeigen, daß das in 1.) gefundene $\mathcal{P}$ ein Primideal in $\mathcal{A}$ ist: Nehmen wir an, $\mathcal{P}$ sei kein Primideal; dann existieren $U, V \in \mathcal{A} - \mathcal{P}$ mit $UV \in \mathcal{P}$. Wegen der Maximalität von $\mathcal{P}$ liegt A' sowohl in $[\mathcal{P}, U]$ als auch in $[\mathcal{P}, V]$. Aufgrund von (4.2.) gibt es Elemente U_1, U_2, V_1, V_2 derart, daß gilt: $U_1, V_1 \in \mathcal{P}$; $U_2, V_2 \in \mathcal{A}$ mit $U_2 \subset U, V_2 \subset V$; $U_1^+ U_2 = A' = V_1^+ V_2$.

Daraus folgt

$$(*) \quad A' = (U_1^+ U_2) \cdot (V_1^+ V_2) = U_1 V_1^+ U_2 V_1^+ U_1 V_2^+ U_2 V_2.$$

Nun ist $U_2 V_2 \in \mathcal{A}$ mit $U_2 V_2 \subset UV \in \mathcal{P}$ und damit $U_2 V_2 \in \mathcal{P}$. Weiter sind U_1 und V_1 Elemente von $\mathcal{P}$, so daß auch $U_1 V_2, U_2 V_1$ und $U_1 V_1$ in $\mathcal{P}$ liegen. Infolge (*) ist A' in $\mathcal{P}$ enthalten im Widerspruch zur Konstruktion von $\mathcal{P}$.

Wir kommen nunmehr zum

Beweis des Satzes (2.4.): $\mathcal{K}$ ist nach Voraussetzung nichttrivial, es gibt also ein $A \in \mathcal{K}$ mit $\emptyset \neq A \neq M$. Wir setzen

$$(4.3.) \quad \text{Definition:} \quad \begin{aligned} A^1 &:= \begin{cases} A & \text{für } i=1 \\ \bar{A} & \text{für } i=2 \end{cases} \\ \alpha_i &:= A^i \mathcal{K} \quad (i=1,2) \\ \mathcal{I}_i &:= \{\emptyset\} \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

α_i sind Mengenkörper über A^i ; $\mathcal{I}_i$ sind Ideale in α_i , die A^i nicht enthalten. Folglich gibt es vermöge des Hilfssatzes (4.1.) Primideale $\mathcal{P}_i$ in α_i , die A^i nicht enthalten. Zu $\mathcal{P}_i$ definieren wir die Ultrafilter f_i und die Gesamtheit $\mathcal{M}$ gemäß

$$(4.4.) \quad \text{Definition:} \quad \begin{aligned} f_i &:= \alpha_i - \mathcal{P}_i \quad (i=1,2) \\ \mathcal{M} &:= (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (f_1 \oplus f_2). \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ maximaler Untermengenkörper bezüglich $\mathcal{K}$ ist:

1.) Die Körpereigenschaften von $\mathcal{M}$:

a) Wegen $\mathcal{P}_1 \neq \emptyset$ ist auch $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

b) Sei $X = (X_1 + X_2) \in \mathcal{M}$, wo $X_1 \in \mathcal{O}_1$

Fall 1: Mit $X_1 \in \mathcal{P}_1$ ist $(A^1 - X_1) \in \mathcal{f}_1$ und daher

$$\bar{X} = (A - X_1) + (\bar{A} - X_2) \in \mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2 \subset \mathcal{M}.$$

Fall 2: Mit $X_1 \in \mathcal{f}_1$ ist $(A^1 - X_1) \in \mathcal{P}_1$ und daher

$$\bar{X} = (A - X_1) + (\bar{A} - X_2) \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{M}.$$

c) Sei $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ aus $\mathcal{M}$ mit $X_1, Y_1 \in \mathcal{O}_1$ und daher

$$XY = X_1 Y_1 + X_2 Y_2$$

Fall 1: Für X_1 oder $Y_1 \in \mathcal{P}_1$ gilt wegen der Idealeigenschaft

$$\text{von } \mathcal{P}_1: X_1 \cdot Y_1 \in \mathcal{P}_1 \text{ und daher } X \cdot Y \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{M}.$$

Fall 2: Für $X_1 \in \mathcal{f}_1$, $Y_1 \in \mathcal{f}_1$ ist infolge der Primidealeigenschaft von $\mathcal{P}_1$: $(X_1 \cdot Y_1) \in \mathcal{f}_1$ und daher

$$X \cdot Y \in \mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2 \subset \mathcal{M}.$$

Aus a), b), c) folgt: $\mathcal{M}$ ist ein Mengenkörper über M , der wegen

$\mathcal{f}_1, \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{K}$ Unterkörper von $\mathcal{K}$ ist. Außerdem ist

$A = A + \emptyset \in \mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{P}_2$, und somit gilt $A \notin \mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{M} \neq \mathcal{K}$.

2.) Die Maximalität von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{K}$:

Sei B ein beliebiges Element aus $\mathcal{K} - \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M} := {}^K(\mathcal{M} + \{B\}) = {}^K(\mathcal{M} + \{\bar{B}\})$ ist, können wir o.B.d.A. setzen $B = B_1 + B_2$ mit

$B_1 \in \mathcal{P}_1$, $B_2 \in \mathcal{f}_2$. Sei weiter $X \in \mathcal{K} - \mathcal{M}$ beliebig. Wir dürfen,

da es lediglich darauf ankommt, $X \in \mathcal{M}$ oder $\bar{X} \in \mathcal{M}$ zu beweisen,

die Darstellung $X = X_1 + X_2$ mit $X_1 \in \mathcal{f}_1$ und $X_2 \in \mathcal{P}_2$ wählen. Dann

ist $R := (B_1 + X_2) \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ und $S := (X_1 + B_2) \in \mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2$, d.h.

R und S liegen in $\mathcal{M}$ und es gilt wegen $B \in \mathcal{M}$ auch

$$\mathcal{M} \ni R^\dagger B^\dagger S = (B_1 + X_2)^\dagger (B_1^\dagger B_2^\dagger)^\dagger (X_1^\dagger B_2) = X_1^\dagger X_2 = X_1 + X_2 = X.$$

Es ist also $\mathcal{M} = \mathcal{K}$; d.h. $\mathcal{M}$ erfüllt alle Bedingungen von (2.1.).

5. Eine Verschärfung des Existenzsatzes:

Die Freiheit in der Wahl eines $\mathcal{I}$ in Satz (4.1), die wir bisher nicht ausgenutzt haben, gestattet uns, die folgende Verschärfung von Satz (2.4.) zu zeigen:

(5.1.) Satz: Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Mengenkörper über M , wobei $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{K}$ gelte. Dann gibt es zu jedem A aus $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ einen bezüglich $\mathcal{K}$ maximalen Untermengenkörper $\mathcal{M}$, der $\mathcal{L}$ umfaßt und A nicht enthält.

Zunächst eine heuristische Betrachtung:

Nach (3.5.) ist $m = (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (f_1 \oplus f_2)$ mit geeigneten Primidealen $\mathcal{P}_1$ und zugehörigen Ultrafiltern f_1 . Es soll nun $\mathcal{L} \subset m$ erzwungen werden. Hierzu beachten wir, daß für $L \in \mathcal{L}$ mit $L \subset A$, wo A Grundmenge von $\mathcal{A}_1$, wegen $L = L + \emptyset$ stets $L \in \mathcal{P}_1$ sein muß. Also ist $\mathcal{P}_1$ ein Teiler des Ideals $\mathcal{I}_1 := \{X \in \mathcal{A}_1 : X \subset L \subset A \text{ für mindestens ein } L \in \mathcal{L}\}$, wobei die Idealeigenschaft von $\mathcal{I}_1$ noch nachzuweisen ist.

Liegt weiter bei bekanntem $\mathcal{P}_1$ ein LA in $\mathcal{P}_1$, so muß $L\bar{A}$ in $\mathcal{P}_2$ liegen, was zwangsläufig zur Konstruktion von

$\mathcal{Q}_2 := \{\bar{A}L : AL \in \mathcal{P}_1 \text{ und } L \in \mathcal{L}\}$ führt. $\mathcal{Q}_2$ wird eingebettet in ein Ideal $\mathcal{I}_2$, aus welchem man schließlich $\mathcal{P}_2$ findet.

Beweis zu (5.1.):

1.) Es sei A aus $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ beliebig vorgegeben. Wir definieren wie in (4.3.) die Mengen A^1 und die Mengenkörper $\mathcal{A}_1$ über A^1 . Außerdem setzen wir:

$$\mathcal{I}_1 := \{X \in \mathcal{A}_1 : X \subset L \subset A \text{ für mindestens ein } L \in \mathcal{L}\}$$

und behaupten: $\mathcal{I}_1$ ist ein Ideal in $\mathcal{A}_1$, das A nicht enthält.

Es gilt nämlich

a) $\emptyset \in \mathcal{I}_1$, da $\emptyset \in \mathcal{A}_1$ und $\emptyset \in \mathcal{L}$.

- b) Zu $X_1, X_2 \in \mathcal{I}_1$ existieren $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ mit $X_1 \subset L_1 \subset A$. Dann ist $X_1^+ X_2 \in \mathcal{A}_1$ und $X_1^+ X_2 \subset L_1^+ L_2 \subset A$, und infolge $L_1^+ L_2 \in \mathcal{L}$ liegt $X_1^+ X_2$ in $\mathcal{I}_1$.
- c) Seien X_1 und damit auch L_1 wie in b) gegeben und sei $Y_1 \in \mathcal{A}_1$, dann ist infolge $X_1 Y_1 \subset L_1 \subset A$ auch $X_1 Y_1 \in \mathcal{I}_1$.
- d) Bei $A \in \mathcal{I}_1$ wäre $A \subset L \subset A$, also $L=A$ im Widerspruch zu $A \notin \mathcal{L}$. Zu $\mathcal{I}_1$ finden wir vermöge (4.1.) ein Primideal $\mathcal{P}_1$ in $\mathcal{A}_1$, das ebenfalls A nicht enthält.

2.) Nun definieren wir die Gesamtheit $\mathcal{Q}_2 := \{\bar{A}L : AL \in \mathcal{P}_1 \text{ und } L \in \mathcal{L}\}$ und zeigen, daß $\mathcal{Q}_2$ nicht leer ist, $\bar{A}$ nicht enthält und gegenüber der Bildung der Vereinigungsmenge abgeschlossen ist.

- a) Es ist $A\emptyset \in \mathcal{P}_1$, also $\emptyset = \bar{A}\emptyset \in \mathcal{Q}_2$ wegen $\emptyset \in \mathcal{L}$.
- b) Im Fall $\bar{A} \in \mathcal{Q}_2$ gäbe es ein $L \in \mathcal{L}$ mit $AL \in \mathcal{P}_1$ und $\bar{A}L = \bar{A}$. Aus letzterem schließen wir $\bar{A} \subset L$, d.h. $\bar{L} \subset A$ bzw. $\bar{L}A \in \mathcal{P}_1$. Mit $A\bar{L} \in \mathcal{P}_1$ und $AL \in \mathcal{P}_1$ finden wir $AL^+ A\bar{L} = A \in \mathcal{P}_1$ entgegen der Konstruktion von $\mathcal{P}_1$.

- c) Zu G_1, G_2 gibt es $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ mit $G_1 = \bar{A}L_1$ und $AL_1 \in \mathcal{P}_1$. Dann ist $L_1^+ L_2 \in \mathcal{L}$ und vermöge (3.4.) $A(L_1^+ L_2) = AL_1^+ AL_2 \in \mathcal{P}_1$, d.h. $G_1^+ G_2 = \bar{A}L_1^+ \bar{A}L_2 = \bar{A}(L_1^+ L_2) \in \mathcal{Q}_2$.

3.) Zu $\mathcal{Q}_2$ konstruieren wir die Gesamtheit

$$\mathcal{I}_2 := \{X \in \mathcal{A}_2 : X \subset G \text{ für mindestens ein } G \in \mathcal{Q}_2\},$$

die in jedem $\mathcal{Q}_2$ umfassenden Ideal enthalten ist. Wir zeigen nun, daß $\mathcal{I}_2$ bereits ein Ideal ist, welches $\bar{A}$ nicht enthält:

- a) Wegen $\emptyset \in \mathcal{Q}_2$ ist auch $\emptyset \in \mathcal{I}_2$.
- b) Zu $X_1, X_2 \in \mathcal{I}_2$ gibt es $G_1, G_2 \in \mathcal{Q}_2$, mit $G_1 \supset X_1$ und es folgt $X_1^+ X_2 \subset G_1^+ G_2 \in \mathcal{Q}_2$, also $X_1^+ X_2 \in \mathcal{I}_2$ wegen $X_1^+ X_2 \in \mathcal{A}_2$.
- c) Für X_1, G_1 gemäß b) und beliebiges $Y \in \mathcal{A}_2$ ist $X_1 Y \in \mathcal{A}_2$ und $X_1 Y \subset G_1 \in \mathcal{Q}_2$, d.h. $X_1 Y \in \mathcal{I}_2$.

d) Wäre $\bar{A}$ in $\mathcal{I}_2$ enthalten, so gäbe es ein G_1 mit $\bar{A} \subset G_1 \in \mathcal{Q}_2$.

Andererseits gilt $G_1 \subset \bar{A}$, woraus $\bar{A} = G_1 \in \mathcal{Q}_2$ folgt, was bereits widerlegt wurde.

4.) Der Hilfssatz (4.1.) erlaubt uns jetzt, ein $\mathcal{I}_2$ enthaltendes Primideal $\mathcal{P}_2$ bezüglich $\mathcal{A}_2$ mit $\bar{A} \notin \mathcal{P}_2$ zu wählen. Entsprechend (4.4.) definieren wir die Ultrafilter $\mathcal{f}_i$ ($i=1,2$). Setzen wir

$$\mathcal{M} := (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2),$$

so haben wir, wie im Beweis von Satz (2.4.) gezeigt wurde, einen bezüglich $\mathcal{K}$ maximalen Untermengenkörper, der die Menge A nicht enthält. Zu zeigen ist noch, daß $\mathcal{M}$ den Mengenkörper $\mathcal{L}$ umfaßt. Für $L \in \mathcal{L}$ liegt LA in $\mathcal{A}_1$ und damit in $\mathcal{P}_1$ oder $\mathcal{f}_1$. Im Falle $LA \in \mathcal{P}_1$ ist $L\bar{A} \in \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{P}_2$, so daß $L = LA + L\bar{A} \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{M}$. Im Falle $LA \in \mathcal{f}_1$ ist $L\bar{A} = (A - LA) \in \mathcal{P}_1$. Wie im vorigen Falle folgt $L \in \mathcal{M}$ und damit auch $L \in \mathcal{M}$.

6. Anwendungen der Existenzsätze:

Die soeben gewonnenen Sätze sollen jetzt benutzt werden, um einige Fragen zu klären, die bei der Erweiterung von Mengenkörpern zu

σ -Körpern auftreten. Um eine kurze Sprechweise zu haben, setzen wir fest:

(6.1.) Definition: Ein Mengenkörper heißt genau dann gewöhnlicher Mengenkörper, wenn er kein σ -Körper ist.

Damit formulieren wir das folgende

Problem: Sei $\mathcal{Q}$ ein gewöhnlicher Mengenkörper über M und B ein beliebiges Element der Borelschen Erweiterung ${}^B\mathcal{Q}$ von $\mathcal{Q}$. Entsteht dann durch Adjunktion von B zu $\mathcal{Q}$ wieder ein gewöhnlicher Mengenkörper?

Satz (5.1.) lehrt nun, daß dies keineswegs immer der Fall ist.

Setzen wir nämlich ${}^B\mathcal{Q} = : \mathcal{K}$ und $\mathcal{Q} = : \mathcal{L}$, so finden wir einen

Mengenkörper $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{O} \subset \mathcal{M} \subsetneq {}^B\mathcal{O}$ und $K(\mathcal{M} + \{B\}) = {}^B\mathcal{O}$ für alle B aus ${}^B\mathcal{O} - \mathcal{M}$. Wäre $\mathcal{M}$ ein σ -Körper, so folgte $\mathcal{M} \supset {}^B\mathcal{O}$ im Widerspruch zu $\mathcal{M} \subsetneq {}^B\mathcal{O}$. $\mathcal{M}$ ist also ein gewöhnlicher Mengenkörper. Gemäß der Konstruktion von $\mathcal{M}$ liefert Adjunktion eines beliebigen B aus ${}^B\mathcal{M} - \mathcal{M}$ stets ${}^B\mathcal{M}$, das per definitionem kein gewöhnlicher Mengenkörper ist. Allgemein läßt sich feststellen:

(6.2.) Satz: Zu jeder Menge M mit unendlich vielen Elementen gibt es einen gewöhnlichen Mengenkörper $\mathcal{O}$ über M , der bei Adjunktion einer beliebigen Teilmenge B von M mit $B \notin \mathcal{O}$ zu einem σ -Körper wird.

Beweis: $\mathcal{L} := \{X \subset M: X \text{ oder } \bar{X} \text{ enthält höchstens endlich viele Elemente}\}$ ist ein Mengenkörper über M . Die Menge M kann man in eine abzählbar unendliche Teilmenge M_1 und eine unendliche Teilmenge M_2 zerlegen. Definitionsgemäß ist jede Menge $\{x\}$ mit $x \in M_1$ in $\mathcal{L}$ enthalten, jedoch nicht die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{x \in M_1} \{x\} = M_1$. Folglich ist $\mathcal{L}$ ein gewöhnlicher Mengenkörper. Dagegen stellt die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einen σ -Körper über M dar, der infolge $M_1 \notin \mathcal{L}$ den Mengenkörper $\mathcal{L}$ echt enthält. Nach Satz (5.1.) gibt es einen bezüglich $\mathcal{P}(M)$ maximalen Untermengenkörper $\mathcal{O}$, der $\mathcal{L}$ umfaßt, aber M_1 nicht enthält und deshalb kein σ -Körper ist. Weiter gilt $K(\mathcal{O} + \{B\}) = \mathcal{P}(M)$ für alle $B \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{O}$, da $\mathcal{O}$ maximal bezüglich $\mathcal{P}(M)$. Das so konstruierte $\mathcal{O}$ erfüllt mithin alle Behauptungen des Satzes (6.2.). Da jeder Mengenkörper über einer endlichen Grundmenge ein σ -Körper ist, folgt unmittelbar:

Es gibt genau dann einen gewöhnlichen Mengenkörper $\mathcal{O}$ über M mit den Eigenschaften von (6.2.), wenn M nicht endlich ist.

In bezug auf die Unterschiedsbildung „ $\dot{+}$ “ ist jeder Mengenkörper $\mathcal{K}$ eine Abelsche Gruppe. Dabei ist jeder Untermengenkörper $\mathcal{U}$ in

$\mathcal{K}$ ein Normalteiler. Wir übertragen nun den Indexbegriff der Gruppentheorie auf Mengenkörper.

(6.3.) Definition: Der Index $I(\mathcal{K} | \mathcal{U})$ eines Untermengenkörpers $\mathcal{U}$ über M in einem Mengenkörper $\mathcal{K}$ über M ist der Index von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{U}$ und $\mathcal{K}$ als Gruppen bezüglich „ $+$ “ aufgefaßt werden.

Mit dieser Bezeichnung stellen wir ein weiteres Kriterium für Maximalität auf.

(6.4.) Satz: Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ Mengenkörper über M , wobei $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ gelte. $\mathcal{U}$ ist dann und nur dann maximal bezüglich $\mathcal{K}$, wenn $I(\mathcal{K} | \mathcal{U}) = 2$.

Beweis: Sei $I(\mathcal{K} | \mathcal{U}) = 2$. Gäbe es keinen Mengenkörper $\mathcal{Z}$ mit $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{Z} \subsetneq \mathcal{K}$, so müßte $2 = I(\mathcal{K} | \mathcal{U}) = I(\mathcal{K} | \mathcal{Z}) \cdot I(\mathcal{Z} | \mathcal{U})$ mit $I(\mathcal{K} | \mathcal{Z}) > 1$, $I(\mathcal{Z} | \mathcal{U}) > 1$ gelten, was nicht möglich ist. Sei $\mathcal{U}$ maximal in $\mathcal{K}$, dann existiert ein $A \in \mathcal{K} - \mathcal{U}$, und es ist $\mathcal{U} = (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2)$, $\mathcal{K} = (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2) + (\mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2) + (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{f}_2) + (\mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{P}_2)$,

wobei $A, \mathcal{P}_1, \mathcal{f}_1$ wie in §2 definiert sind. Wir zeigen, daß $A^+ \mathcal{U} \supset (\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{f}_2) + (\mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{P}_2) =: \mathcal{N}$ gilt. Dabei ist $A^+ \mathcal{U}$ diejenige Nebenklasse von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{U}$, die A enthält. Sei $X = X_1 + X_2$ ein Element von $\mathcal{N}$. Wir unterscheiden:

Fall 1: $X_1 \in \mathcal{P}_1, X_2 \in \mathcal{f}_2$: Dann ist $(A - X_1) + X_2 \in \mathcal{f}_1 \oplus \mathcal{f}_2 \subset \mathcal{U}$ und deshalb $X_1 + X_2 = A^+ A^+ X_1^+ X_2 = A^+ ((A - X_1) + X_2) \in A^+ \mathcal{U}$.

Fall 2: $X_1 \in \mathcal{f}_1, X_2 \in \mathcal{P}_2$: Dann ist $(A - X_1) + X_2 \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{U}$ und daher $X_1 + X_2 = A^+ A^+ X_1^+ X_2 = A^+ ((A - X_1) + X_2) \in A^+ \mathcal{U}$.

In jedem Fall liegt X in $A^+ \mathcal{U}$, was zu zeigen war.

Eine direkte Folge der Sätze (6.4.) und (2.4.) ist

(6.5) Satz: Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{U}$ Mengenkörper über M mit $\mathcal{U} \neq \mathcal{K}$ und sei

$I := I(\mathcal{K}|\mathcal{U}) < \infty$. Dann gibt es eine endliche Folge von

Mengenkörpern $\mathcal{K}_i$ ($i=1, \dots, l+1$), derart, daß gilt:

$$\mathcal{U} = \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \dots \subset \mathcal{K}_{l+1} = \mathcal{K} \quad \text{und}$$

$\mathcal{K}_i$ maximal bezüglich $\mathcal{K}_{i+1}$ für alle $i=1, \dots, l$.

Beweis: Wir führen eine vollständige Induktion nach I durch:

Für $I=2$ ist die Behauptung zufolge (6.4.) mit $l=1$, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{U}$, $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ richtig, und für $I \leq n$ nehmen wir sie als richtig an.

Für $I=n+1$ gibt es vermöge (2.4) zu $\mathcal{K}$ einen maximalen Untermengenkörper $\mathcal{M}$. Es ist $I = I(\mathcal{K}|\mathcal{M}) \cdot I(\mathcal{M}|\mathcal{U}) = 2 \cdot I(\mathcal{M}|\mathcal{U})$, d.h. $I(\mathcal{M}|\mathcal{U}) \leq n$ und nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{U} = \mathcal{K}_1 \subset \dots \subset \mathcal{K}_{l+1} = \mathcal{M} \subset \mathcal{K} = \mathcal{K}_{l+2}$, wobei $\mathcal{K}_i$ maximal bezüglich $\mathcal{K}_{i+1}$ ist.

Nun wollen wir einen Schritt weitergehen und den Index $I(X|\mathcal{K})$ einer Menge $X \subset M$ bezüglich eines Mengenkörpers $\mathcal{K}$ über M definieren.

(6.6.) Definition: $I(X|\mathcal{K}) := I(K(\mathcal{K} + \{X\})|\mathcal{K})$.

Satz (6.5.) in Verbindung mit (6.4.) sagt aus, daß endliche Indizes $I(X|\mathcal{K})$ stets Zweierpotenzen sind. Andererseits läßt sich zu jeder natürlichen Zahl n ein Mengenkörper $\mathcal{K}_0$ und eine Menge X_n finden, so daß $I(X_n|\mathcal{K}_0) = 2^n$.

In der Tat: Seien M und Z wie in (2.3.) definiert und sei

$\mathcal{K}_0 := \{X + (-X) : X \in \mathcal{P}(Z)\}$ ein Mengenkörper mit den Atomen

$A_r = \{r, -r\}$ ($r=1, 2, \dots$). Setzen wir $X_n := \{1, \dots, n\}$ und

$\mathcal{K}_n := K(\mathcal{K}_0 + \{X_n\})$, so haben wir $I(X_n|\mathcal{K}) = 2^n$, was wir mittels

vollständiger Induktion zeigen:

$n=1$: Es ist $\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_0 = \{\{1\} + X, \{-1\} + Y : X, Y \subset A_1 \text{ und } X, Y \in \mathcal{K}_0\}$.

Wegen $\{1\}^+ A_1 = \{-1\}$ liegen $\{1\}$ und $\{-1\}$ in derselben Nebenklasse von $\mathcal{K}_1$ bezüglich $\mathcal{K}_0$, d.h. $I(\mathcal{K}_1|\mathcal{K}_0) = 2$ und demnach $I(X_1|\mathcal{K}_0) = 2$.

Induktionsschluß: Es ist $X_n = X_{n+1}(A_1 + \dots + A_n)$ in $\mathcal{K}_{n+1}$ enthalten,
d.h. $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}$ und nach Induktionsvoraussetzung $I(X_n | \mathcal{K}_0) = 2^n$.
Daher genügt es zu zeigen, daß $I(\mathcal{K}_{n+1} | \mathcal{K}_n) = 2$. Wir haben
 $\mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n = \{ \{n+1\} \cdot X, \{-n-1\} \cdot Y : \overline{A_{n+1}} \supset X, Y \text{ u. } X, Y \in \mathcal{K}_n \}$.
Dabei ist $\{n+1\} \cdot A_{n+1} = \{-n-1\}$, d.h. $\mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n$ besteht aus
genau einer Nebenklasse von $\mathcal{K}_{n+1}$ nach $\mathcal{K}_n$, was zu zeigen war.

Für Elemente derselben Nebenklasse gilt:

(6.7.) Satz: Elemente derselben Nebenklasse zu $\mathcal{K}$ haben denselben
Index bezüglich $\mathcal{K}$.

Beweis: Sei $X_1 \in X_2 \cdot \mathcal{K}$, dann gilt wegen $X_1 = X_2 \cdot K$ und $X_2 = X_1 \cdot K$
für passendes K aus $\mathcal{K}$ die Beziehung $K(\mathcal{K} \dot{+} \{X_1\}) = K(\mathcal{K} \dot{+} \{X_2\})$,
womit die Behauptung bewiesen ist.

Zum Abschluß dieses Paragraphen sollen noch einige Fragen bezügl.
der eindeutigen Existenz maximaler Untermengenkörper erörtert
werden. Zunächst stellen wir fest

(6.8.) Satz Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Mengenkörper über M mit $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{K}$. Not-
wendig und hinreichen dafür, daß bezüglich $\mathcal{K}$ genau ein
maximaler Untermengenkörper $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ existiert, ist
 $I(\mathcal{K} | \mathcal{L}) = 2$.

Beweis: Die Bedingung $I(\mathcal{K} | \mathcal{L}) = 2$ ist hinreichend, da dann nach
Satz (6.4.) $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ sein muß.

Sei nun $I(\mathcal{K} | \mathcal{L}) > 2$ und $\mathcal{M}_1$ ein nach Satz (5.1.) stets existieren-
der maximaler Untermengenkörper, der $\mathcal{L}$ umfaßt. Dann ist
 $I(\mathcal{M}_1 | \mathcal{L}) \geq 2$, und es gibt ein $A \in \mathcal{M}_1 - \mathcal{L}$. Gemäß (5.1.) existiert
aber ein bezüglich $\mathcal{K}$ maximaler Untermengenkörper $\mathcal{M}_2$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}_2$
und $A \notin \mathcal{M}_2$. Wir haben demnach mindestens zwei verschiedene maxima-
le Untermengenkörper $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$, wie behauptet wurde.

Nun wollen wir für den Spezialfall $I(\mathcal{K}|\mathcal{L}) = 4$ untersuchen, wieviel verschiedene maximale Untermengenkörper bezüglich $\mathcal{K}$ möglich sind, die $\mathcal{L}$ umfassen. Wir nennen diese Anzahl a . Nach Satz (6.8.) ist $a \geq 2$. Andererseits zerfällt $\mathcal{K}$ bezüglich $\mathcal{L}$ in 4 Nebenklassen, d.h. es ist

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} + (N_1^+ \mathcal{L}) + (N_2^+ \mathcal{L}) + (N_3^+ \mathcal{L}) \text{ für geeignete } N_i \in \mathcal{K} - \mathcal{L}.$$

Da jeder maximale Untermengenkörper $\mathcal{M}$ bezüglich $\mathcal{K}$ den Index 2 hat, enthält $\mathcal{M}$ neben $\mathcal{L}$ noch genau ein $N_i^+ \mathcal{L}$. Es gibt mithin höchstens 3 verschiedene $\mathcal{M}$, d.h. $2 \leq a \leq 3$.

Wir überzeugen uns, daß die Fälle $a=2$ und $a=3$ auch wirklich auftreten.

(6.9.) Beispiel für $a = 3$:

Es sei $M := \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{L} := \{\emptyset, M\}$, $\mathcal{K} := \mathcal{P}(M)$. Wie üblich bezeichnen wir mit $|\mathcal{O}|$ die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{O}$. Wegen $|\mathcal{L}|=2$ und $|\mathcal{K}|=8$ ist $I(\mathcal{K}|\mathcal{L})=4$. Weiter ist

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, M\} + \{\{1\}, \{2, 3\}\} + \{\{2\}, \{1, 3\}\} + \{\{3\}, \{1, 2\}\} =: \mathcal{L} + \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3$$

Man sieht unmittelbar, daß jedes $\mathcal{M}_i := \mathcal{L} + \mathcal{N}_i$ ein Mengenkörper der Gestalt $\{\emptyset, M, A, \bar{A}\}$ ist.

(6.10) Beispiel für $a = 2$:

Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{L} := \{\emptyset, M, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\mathcal{K} := \mathcal{P}(M)$. $\mathcal{L}$ ist ein Mengenkörper, wegen $|\mathcal{L}| = 4$, $|\mathcal{K}| = 16$ gilt $I(\mathcal{K}|\mathcal{L}) = 4$ und es ist

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} + \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3, \text{ wobei } \mathcal{N}_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}\}.$$

Bildet man $\mathcal{M}_3 := \mathcal{L} + \mathcal{N}_3$, so entsteht kein Mengenkörper. Es ist nämlich $\{1, 3\}, \{1, 4\} \in \mathcal{M}_3$, aber $\{1, 3\}\{1, 4\} = \{1\} \notin \mathcal{M}_3$. Folglich ist $a < 3$ und nach Satz (6.8.) gilt $a = 2$.

Wir bemerken noch, daß die Verschiedenheit von a in (6.9.) und (6.10.) darauf beruht, daß in (6.10.) die Elemente von $\mathcal{N}_3$ den Index 4 bezüglich $\mathcal{L}$ besitzen. Das soeben konstruierte Beispiel

(6.10.) lehrt überdies, daß eine Verallgemeinerung von Satz (5.1.) in der Richtung nicht möglich ist, daß zwei beliebig vorgegebene Elemente A und B aus $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$ nicht enthalten sein sollen. Denn setzen wir in (6.10.) $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ wie angegeben und wählen A aus $\mathcal{M}_1$, B aus $\mathcal{M}_2$, so kann das zu konstruierende $\mathcal{M}$ nur die Gestalt $\mathcal{M} = \mathcal{L} + \mathcal{M}_3$ haben, was aber, wie schon gezeigt, keinen Mengenkörper ergibt.

7. Umkehrung der Problemstellung von 2.:

Uns ist aus Satz (2.4.) bekannt, daß es zu jedem nichttrivialen Mengenkörper $\mathcal{K}$ einen maximalen Untermengenkörper $\mathcal{M}$ gibt. Wir führen nun eine neue Bezeichnung ein

(7.1.) Definition: $\mathcal{K}$ heißt minimaler Obermengenkörper bezüglich $\mathcal{M}$, wenn $\mathcal{M}$ maximaler Untermengenkörper bezüglich $\mathcal{K}$ ist; und fragen nach der Existenz solcher Obermengenkörper zu einem vorgegebenen Mengenkörper $\mathcal{M}$. Unmittelbare Folge von (6.4.) ist das Kriterium

(7.2.) Satz: Zu $\mathcal{M}$ über M gibt es genau dann einen minimalen Obermengenkörper, wenn ein $A \subset M$ mit $I(A|\mathcal{M}) = 2$ existiert.

Etwas schwächer ist die folgende Bedingung:

(7.3.) Satz: Notwendig und hinreichend für die Existenz eines minimalen Obermengenkörpers $\mathcal{K}$ zu einem vorgegebenen Mengenkörper $\mathcal{M}$ über M ist die Existenz eines $B \subset M$ mit

$$2 \leq I(B|\mathcal{M}) < \infty.$$

Beweis: Die Notwendigkeit gilt wegen (7.2.); das Hinreichen folgt aus (6.5.)

Die Bedingung des Kriteriums (7.2.) läßt sich noch in einer für die Anwendung günstigeren Form schreiben.

(7.4.) Satz: $I(A|\mathcal{M}) = 2$ gilt genau dann, wenn $A \notin \mathcal{M}$ und für jedes $X \in \mathcal{M}$ entweder AX oder $A\bar{X}$ in $\mathcal{M}$ liegt.

Beweis: 1. Setzt man $\mathcal{N} := A^\dagger \mathcal{M}$, so ist nach (6.6.) $I(A|\mathcal{M}) = 2$ gleichbedeutend mit der Aussage: $\mathcal{L} := \mathcal{M} + \mathcal{N}$ ist ein Mengenkörper. Sei L ein beliebiges Element aus $\mathcal{L}$. Falls $L \in \mathcal{M}$ ist, liegt auch $\bar{L}$ in $\mathcal{M}$ und damit in $\mathcal{L}$; falls $L \in \mathcal{N}$ ist, gilt $L = A^\dagger X$ mit geeignetem $X \in \mathcal{M}$, woraus $\bar{L} = A^\dagger \bar{X} \in \mathcal{N}$ und weiter $\bar{L} \in \mathcal{L}$ folgt.

$\mathcal{L}$ ist also gegenüber Komplementbildung abgeschlossen.

2. Wir untersuchen nun die Abgeschlossenheit bezüglich der Durchschnittsbildung. Hierzu seien im folgenden X_1 beliebige Elemente aus $\mathcal{M}$ und $N_1 = A^\dagger X_1'$ beliebige Elemente aus $\mathcal{N}$. Dann liegt $X_1 X_2$ in $\mathcal{M}$. Außerdem gilt:

$$X_1 N_1 = A X_1^\dagger X_1 X_1' = A X_1^\dagger X' \text{ mit } X' \in \mathcal{M}, \text{ sowie}$$

$$N_1 N_2 = A^\dagger A X_1^\dagger A X_2^\dagger X_1' X_2' = A X''^\dagger X''', \text{ wobei } X'', X''' \in \mathcal{M}.$$

$X_1 N_1$ und $N_1 N_2$ liegen also genau dann in $\mathcal{L}$, wenn $A X'^\dagger X''$ für beliebige $X', X'' \in \mathcal{M}$ in $\mathcal{L}$ liegt. Dabei ist der Fall $A X'^\dagger X'' \in \mathcal{M}$ gleichbedeutend mit $A X' \in \mathcal{M}$, während der Fall $A X'^\dagger X'' \in \mathcal{N}$, d.h. $A X'^\dagger X'' = A^\dagger X'''$ für passendes $X''' \in \mathcal{M}$ mit $A \bar{X}^\dagger = A^\dagger A X' \in \mathcal{M}$ gleichwertig ist. Damit ist (7.4.) vollständig bewiesen. Der Existenzsatz (2.4.) legt nun die Vermutung nahe, daß es zu jedem Mengenkörper $\mathcal{M}$ über M mit $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(M)$ einen minimalen Obermengenkörper $\mathcal{K}$ gibt. Dies wird jedoch widerlegt durch

(7.5.) Satz: Zu einem Mengenkörper $\mathcal{M}$ über M existiert auch im Fall $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(M)$ nicht allgemein ein minimaler Obermengenkörper $\mathcal{K}$.

Beweis: Wir wählen den im Beispiel (2.3.) angegebenen Mengenkörper $\mathcal{M}$ und zeigen, daß kein Element aus $\mathcal{P}(M) - \mathcal{M}$ die Bedingung des Satzes (7.4.) erfüllt.

Sei also $A = A_1 + (-A_2) \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{M}$. Dann ist $A_1^+ A_2$ unendlich. Sei $W \subset A_1^+ A_2$ so gewählt, daß W und $(A_1^+ A_2) - W$ unendlich sind, und sei ferner $K = W + (-W)$. K liegt in $\mathcal{M}$, und es ist dann $AK = A_1 W + (-A_2 W)$, wo $A_1 W^+ A_2 W = W$ unendlich, sowie $A\bar{K} = A_1 \tilde{W} + (-A_2 \tilde{W})$, wo $A_1 \tilde{W}^+ A_2 \tilde{W} = (A_1^+ A_2) - W$ unendlich ist. Also liegen AK und $A\bar{K}$ nicht in $\mathcal{M}$, was zu zeigen war. Es sei noch angemerkt, daß in diesem Beispiel wegen (7.3.) jedes $A \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{M}$ bezüglich $\mathcal{M}$ den Index ∞ hat. Für solche Mengenkörper geben wir eine notwendige Bedingung an:

(7.6.) Satz: Sei $\mathcal{M}$ Mengenkörper über M derart, daß jedes A aus $\mathcal{P}(M) - \mathcal{M}$ unendlichen Index über $\mathcal{M}$ besitzt. Dann enthält $\mathcal{M}$ alle einpunktigen Teilmengen von M .

Beweis: Sei $x \in M$ und $X \in \mathcal{M}$ beliebig gewählt. Dann ist entweder $x \in X$ oder $x \in \bar{X}$, so daß einer der beiden Durchschnitte $\{x\}X$ oder $\{x\}\bar{X}$ gleich $\emptyset$ ist und daher in $\mathcal{M}$ liegt. Wäre $\{x\} \notin \mathcal{M}$, so hätte $\{x\}$ gemäß Satz (7.4.) den Index 2 über $\mathcal{M}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

8. Die Struktur von Erweiterungskörpern:

Im Satz (7.4.) des vorhergehenden Paragraphen stellten wir ein Kriterium für den Fall $I(A|\mathcal{K}) = 2$ auf. Bezeichnen wir die dort auftretende Menge $\{K: AK \in \mathcal{K}\}$ mit $\mathcal{I}(A)$, so finden wir, daß $\mathcal{I}(A)$ ein Ideal in $\mathcal{K}$ ist mit $|\mathcal{K}| |\mathcal{I}(A)| = 2$. Es gilt mithin $I(A|\mathcal{K}) = |\mathcal{K}| |\mathcal{I}(A)|$. Diese Überlegungen wollen wir jetzt auf beliebige Indizes übertragen. Zu diesem Zweck setzen wir

(8.1.) Definition: Sei $\mathcal{K}$ ein Mengenkörper über M und $L \subset M$, sowie $\mathcal{L}$ ein Mengenkörper über M mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$. Dann heißt

1.) $\mathcal{I}(L) := \{X \in \mathcal{K} : LX \in \mathcal{K}\}$ das L zugeordnete Ideal in $\mathcal{K}$

2.) $\mathcal{I}(\mathcal{L}) := \prod_{L \in \mathcal{L}} \mathcal{I}(L)$ das $\mathcal{L}$ zugeordnete Ideal in $\mathcal{K}$.

Wir müssen nun zeigen:

(8.2.) Satz: $\mathcal{I}(L)$ und $\mathcal{I}(L')$ sind Ideale in $\mathcal{K}$.

Beweis: 1.a) Sei $X_1, X_2 \in \mathcal{I}(L)$, d.h. $X_1L, X_2L \in \mathcal{K}$. Dann ist auch $L(X_1^+X_2) = LX_1^+LX_2 \in \mathcal{K}$ und somit $(X_1^+X_2) \in \mathcal{I}(L)$.

b) Mit $K \in \mathcal{K}$ und $X \in \mathcal{I}(L)$, d.h. $LX \in \mathcal{K}$, ist auch $(KX)L \in \mathcal{K}$, so daß $KX \in \mathcal{I}(L)$ ist.

2.) $\mathcal{I}(L')$ ist als Durchschnitt von Idealen wieder ein Ideal in $\mathcal{K}$. Nahezu trivial ist der

(8.3.) Satz: Seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ Mengenkörper über M mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Dann gilt für die in $\mathcal{K}$ zugeordneten Ideale:
 $\mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \supset \mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$.

Beweis: Aus $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ folgt $\mathcal{I}(\mathcal{L}_1) = \prod_{L \in \mathcal{L}_1} \mathcal{I}(L) \supset \prod_{L \in \mathcal{L}_2} \mathcal{I}(L) = \mathcal{I}(\mathcal{L}_2)$.

Ehe wir weitere Eigenschaften der zugeordneten Ideale herleiten können, müssen wir einen Hilfssatz einschieben:

(8.4.) Hilfssatz: Sei $\mathcal{K}$ ein Mengenkörper über M und $L_1, L_2 \subset M$.

Dann ist:

$$a) \mathcal{K}(\{L_1\} + \mathcal{K}) = \{L_1K_1^+K_2 : K_1, K_2 \in \mathcal{K}\}$$

$$b) \mathcal{K}(\{L_1, L_2\} + \mathcal{K}) = \{L_1L_2K_0^+L_1K_1^+L_2K_2^+K_3 : K_1 \in \mathcal{K}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } a) \mathcal{K}(\{L_1\} + \mathcal{K}) &= \{L_1K_1^+L_1K_2^+K_1' \in \mathcal{K}\} = \{K_1^+L_1^+K_2^+(M^+L_1) : K_1' \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(K_1^+K_2^+)L_1^+K_2^+K_1' \in \mathcal{K}\} = \{K_1L_1^+K_2 : K_1 \in \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

b) folgt aus a) indem man $\mathcal{K}(\{L_2\} + \mathcal{K})$ ersetzt.

Im folgenden werde der Mengenkörper $\mathcal{K}$ über M als Untermengenkörper aller auftretenden Mengenkörper festgehalten, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

(8.5.) Satz: a) Aus $\mathcal{L}' = \mathcal{K}(\{L\} + \mathcal{K})$ mit $L \subset M$ folgt $\mathcal{I}(\mathcal{L}') = \mathcal{I}(L)$

b) Für $L_1, L_2 \subset M$ folgt aus $\mathcal{L}'' = \mathcal{K}(\{L_1, L_2\} + \mathcal{K})$ die Beziehung $\mathcal{I}(\mathcal{L}'') = \mathcal{I}(L_1) \mathcal{I}(L_2)$.

Beweis: a) Sei $L' \in \mathcal{L}'$, dann ist vermöge (8.4.) $L' = LK_1^+K_2$ für

passende $K_1 \in \mathcal{K}$. Mit $X \in \mathcal{I}(L)$, d.h. $LX \in \mathcal{K}$ ist dann auch wegen $X \in \mathcal{K}$ $L'X = LK_1X^\dagger K_2X = (LX)K_1^\dagger XK_2 \in \mathcal{K}$, was $X \in \mathcal{I}(L')$ nach sich zieht. Es gilt mithin $\mathcal{I}(L) \subset \mathcal{I}(L')$ für alle $L' \in \mathcal{L}'$, woraus

$$\mathcal{I}(\mathcal{L}') = \prod_{L' \in \mathcal{L}'} \mathcal{I}(L') = \mathcal{I}(L) \text{ folgt.}$$

b) Sei $L'' \in \mathcal{L}''$, also $L'' = L_1L_2K_0^\dagger L_1K_1^\dagger L_2K_2^\dagger K_3$ für geeignete $K_1 \in \mathcal{K}$, und sei weiter $X \in \mathcal{I}(L_1) \mathcal{I}(L_2)$, d.h. $XL_1, XL_2 \in \mathcal{K}$.

Dann ist $XL'' = XL_1L_2K_0^\dagger XL_1K_1^\dagger XL_2K_2^\dagger XK_3 =$

$$= (KL_1)(XL_2)K_0^\dagger (XL_1)K_1^\dagger (XL_2)K_2^\dagger XK_3 \in \mathcal{K}, \text{ woraus } X \in \mathcal{I}(L'') \text{ folgt.}$$

Da $L_1, L_2 \in \mathcal{L}''$, gilt $\mathcal{I}(\mathcal{L}'') = \prod_{L'' \in \mathcal{L}''} \mathcal{I}(L'') = \mathcal{I}(L_1) \mathcal{I}(L_2)$.

Eine Folgerung aus (8.5.) ist folgende Beziehung zwischen Elementen gleicher Nebenklasse nach $\mathcal{K}$ und den zugehörigen Idealen:

(8.6.) Satz: Sei $\mathcal{L}$ Mengenkörper über M mit $\mathcal{L} \supset \mathcal{K}$ und seien L_1, L_2

Elemente derselben Nebenklasse von $\mathcal{L} | \mathcal{K}$. Dann ist

$$\mathcal{I}(L_1) = \mathcal{I}(L_2).$$

Beweis: Wie im Beweis zu (6.7.) gezeigt wurde, gilt

$$K(\{L_1\} | \mathcal{K}) = K(\{L_2\} | \mathcal{K}), \text{ woraus sich unter Verwendung von}$$

(8.5.) die Behauptung unmittelbar ergibt.

(8.7.) Hilfssatz: Sei $L \subset M$ und $\mathcal{L} = K(\{L\} | \mathcal{K})$, dann gilt:

Zu jeder Nebenklasse von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$ existiert ein Repräsentant

$$L_1 = LK_1 \text{ mit geeignetem } K_1 \in \mathcal{K}.$$

Der Beweis ist wegen (8.4.) trivial.

(8.8.) Satz: Unter der Voraussetzung von (8.7.) gilt:

LK_1 und LK_2 mit $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ liegen genau dann in derselben

Nebenklasse von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$, wenn K_1 und K_2 zur selben

Restklasse von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{I}(L)$ gehören.

Beweis: LK_1 und LK_2 in derselben Nebenklasse von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$ ist

$$\text{gleichbedeutend mit } L(K_1^\dagger K_2) = LK_1^\dagger LK_2 \in \mathcal{K}, \text{ d.h. } (K_1^\dagger K_2) \in \mathcal{I}(L),$$

was genau dann zutrifft, wenn K_1 und K_2 in derselben Restklasse von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{I}(L)$ liegen.

Damit können wir folgenden Satz beweisen, den wir für den Spezialfall $I(L|\mathcal{K})=2$ bereits kennen:

(8.9.) Satz: Sei $\mathcal{K}$ Mengenkörper über M und $L \subset M$, dann ist

$$I(L|\mathcal{K}) = |\mathcal{K} | \mathcal{I}(L)| .$$

Beweis: Wir wählen aus jeder Nebenklasse $\mathcal{N}_i$ von ${}^K(\mathcal{K} + \{L\})$ nach $\mathcal{K}$ einen Repräsentanten aus, den wir nach Hilfssatz (8.7.) in der Form $L_1 = LK_1$ mit $K_1 \in \mathcal{K}$ darstellen können. Dann liegen alle K_1 in verschiedenen Restklassen $\mathcal{R}_i$ von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{I}(L)$, womit sich $I(L|\mathcal{K}) \leq |\mathcal{K} | \mathcal{I}(L)|$ ergibt. Andererseits läßt sich zu jedem X_1 aus einer Restklasse $\mathcal{R}_i \in \mathcal{K} | \mathcal{I}(L)$ eine Nebenklasse $\mathcal{N}_i \in {}^K(\mathcal{K} + \{L\}) | \mathcal{K}$ mit $LK_1 \in \mathcal{N}_i$ finden. Gemäß (8.8.) folgt daraus $|\mathcal{K} | \mathcal{I}(L)| \leq I(L|\mathcal{K})$, was den Beweis vervollständigt. Die bisher betrachteten Ideale in $\mathcal{K}$ waren stets einem $L \subset M$ oder einem Mengenkörper $\mathcal{L}$ zugeordnet. Diese Einschränkung wollen wir jetzt aufheben.

(8.10.) Satz: Sei $L \subset M$ und K_1 beliebig aus $\mathcal{K}$, dann folgt:

$$[\mathcal{I}(L), K_1] = \mathcal{I}(L_1) \text{ mit } L_1 = L\bar{K}_1 .$$

Beweis: Mit $X \in \mathcal{I}(L)$, d.h. $XL \in \mathcal{K}$, ist $XL_1 = (XL)\bar{K}_1 \in \mathcal{K}$ und deshalb $X \in \mathcal{I}(L_1)$. Ferner ist $K_1L_1 = L\bar{K}_1K_1 = \emptyset \in \mathcal{K}$, also $K_1 \in \mathcal{I}(L_1)$. Da $\mathcal{I}(L_1)$ bereits ein Ideal in $\mathcal{K}$ ist, folgt $[\mathcal{I}(L), K_1] \subset \mathcal{I}(L_1)$. Sei nun $Y \in \mathcal{I}(L_1)$, d.h. $YL_1 \in \mathcal{K}$ bzw. $YL\bar{K}_1 \in \mathcal{K}$, dann ist $Y\bar{K}_1 \in \mathcal{I}(L) \subset [\mathcal{I}(L), K_1]$. Wegen der Idealeigenschaft von $[\mathcal{I}(L), K_1]$ und weil Y in $\mathcal{K}$ liegt, ist mit K_1 auch YK_1 in $[\mathcal{I}(L), K_1]$ enthalten, so daß $Y = YK_1 \cdot Y\bar{K}_1$ zu $[\mathcal{I}(L), K_1]$ gehört. Damit ergibt sich $\mathcal{I}(L_1) \subset [\mathcal{I}(L), K_1]$ und insgesamt $\mathcal{I}(L_1) = [\mathcal{I}(L), K_1]$. Ganz allgemein gilt der

(8.11.) Hilfssatz: Sei $\mathcal{K}$ ein kommutativer Ring und $\mathcal{I}_0$ ein Ideal in $\mathcal{K}$. Weiter sei $\mathcal{I}$ eine Vereinigung gewisser Restklassen

aus $\mathcal{K} | \mathcal{I}_0$ mit $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{K}$, dann gilt:

$\mathcal{I}$ ist Ideal in $\mathcal{K}$ genau dann, wenn $\mathcal{I} | \mathcal{I}_0$ Ideal in $\mathcal{K} | \mathcal{I}_0$ ist.

Beweis: Die Notwendigkeit folgt aus bekannten Sätzen der Algebra.

Sei also $\mathcal{I} | \mathcal{I}_0$ Ideal in $\mathcal{K} | \mathcal{I}_0$ und $R_1 \in \mathcal{I}$, sowie $K \in \mathcal{K}$, dann hat man $(R_1^\dagger \mathcal{I}_0)^\dagger (R_2^\dagger \mathcal{I}_0) = (R_1^\dagger R_2)^\dagger \mathcal{I}_0 \in \mathcal{I} | \mathcal{I}_0$ und $(R_1^\dagger \mathcal{I}_0)(K^\dagger \mathcal{I}_0) = R_1 K^\dagger \mathcal{I}_0 \in \mathcal{I} | \mathcal{I}_0$. Daher liegen $R_1^\dagger R_2$ und $R_1 K$ in $\mathcal{I}$, was $\mathcal{I}$ als Ideal erweist.

Wir wollen im folgenden unsere Betrachtungen auf spezielle Obermengenkörper $\mathcal{L}$ zu dem festgehaltenen $\mathcal{K}$ beschränken und machen die

(8.12.) Voraussetzung: Es gelte stets $L \subset M$, $\mathcal{L} = K(\{L\} \dagger \mathcal{K})$ und $I(L | \mathcal{K}) < \infty$.

Im Anschluß an die Definition (6.6.) zeigten wir durch ein Beispiel, daß alle Zweierpotenzen als Indizes $I(X | \mathcal{K})$ bei geeigneten X und $\mathcal{K}$ auftreten können. Dabei kam mit einem $I(X_n | \mathcal{K}) = 2^n$ eine ganze Folge X_ν ($\nu = 0, \dots, n-1$) mit den Eigenschaften $I(X_\nu | \mathcal{K}) = 2^\nu$ und $X_\nu \in K(\{X_n\} \dagger \mathcal{K})$ vor. Wir werden jetzt zeigen, daß dies nicht auf den angegebenen Spezialfall beschränkt ist, sondern einen allgemeinen Sachverhalt darstellt.

(8.13.) Satz: Es gelte (8.12.) und ferner $I(L | \mathcal{K}) = 2^n$. Dann gibt es Elemente $X_\nu \in M$ mit den Eigenschaften:

- a) $I(X_\nu | \mathcal{K}) = 2^\nu$ für $\nu = 0, \dots, n$
- b) $K(\{X_\nu\} \dagger \mathcal{K}) \subset K(\{X_{\nu+1}\} \dagger \mathcal{K})$ für $\nu = 0, \dots, n-1$
- c) $\mathcal{I}(X_\nu) \supset \mathcal{I}(X_{\nu+1})$ für $\nu = 0, \dots, n-1$.

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres durch vollständige Induktion nach n aus nachstehendem

(8.14.) Hilfssatz: Es gelte (8.12.), sowie $1 \leq I(L|\mathcal{K}) = 2^r$. Dann existiert ein L_1 aus $\mathcal{L}$ mit $I(L_1|\mathcal{K}) = 2^{r-1}$.

Beweis: 1. Es seien $\mathcal{R}_1$ Restklassen aus $\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)$. Wir übertragen die Durchschnitts- und Unterschiedsbildung in der üblichen Weise auf die Restklassen und erhalten damit einen Booleschen Ring; d.h. einen bezüglich „ $\cdot$ “ idempotenten Ring, wobei alle Elemente bezüglich „ $+$ “ von der Ordnung 2 sind. Weiter gilt $(M^+ \mathcal{J}(L))(K^+ \mathcal{J}(L)) = MK^+ \mathcal{J}(L) = K^+ \mathcal{J}(L)$ für alle $K \in \mathcal{K}$, d.h. die Restklasse $M^+ \mathcal{J}(L)$ stellt ein Einselement in $\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)$ dar, während $\mathcal{J}(L)$ das Nullelement ist. Nach dem Satz von Stokes [1], S.70 ist $\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)$ als Boolescher Ring mit Einselement isomorph einem Mengenkörper $\mathcal{Q}$.

2. Es ist $|\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)| = I(L|\mathcal{K}) < \infty$, also $|\mathcal{Q}| < \infty$. $\mathcal{Q}$ besitzt folglich Atome. Sei $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{K}|\mathcal{J}(L)$ das Urbild eines solchen Atoms in $\mathcal{Q}$, dann gilt $\mathcal{R}_0 \mathcal{R} = \mathcal{J}(L)$ oder $\mathcal{R}_0 \mathcal{R} = \mathcal{R}_0$ für alle $\mathcal{R}$ aus $\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)$, sowie $\mathcal{J}(L)\mathcal{R} = \mathcal{J}(L)$. Bezüglich des Unterschieds finden wir:

$\mathcal{R}_0 + \mathcal{J}(L) = \mathcal{R}_0$, $\mathcal{J}(L) + \mathcal{J}(L) = \mathcal{J}(L)$, $\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_0 = \mathcal{J}(L)$. Damit ist $\{\mathcal{J}(L), \mathcal{R}_0\}$ ein Ideal in $\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)$, und es folgt aus (8.11.): $\mathcal{J}_1 := \mathcal{J}(L) + \mathcal{R}_0$ ist Ideal in $\mathcal{K}$.

3. Jedes Ideal $\mathcal{J}$ in $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{J}(L) \subset \mathcal{J}$ enthält mit $X \in \mathcal{J}$ stets die gesamte Restklasse $X^+ \mathcal{J}(L)$. Demnach gibt es kein Ideal in $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{J}(L) \subsetneq \mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J}_1$. Sei K_1 ein Repräsentant von $\mathcal{R}_0$, so können wir unter Verwendung der in (3.2.) eingeführten Bezeichnung auch schreiben $\mathcal{J}_1 = [\mathcal{J}(L), K_1]$.

4. Vermöge (8.10) gibt es ein $L_1 \in \mathcal{L}$ mit $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}(L_1)$. Da weiter $|\mathcal{J}_1|\mathcal{J}(L)| = 2$ ist und $|\mathcal{K}|\mathcal{J}(L)| = |\mathcal{K}|\mathcal{J}_1| \cdot |\mathcal{J}_1|\mathcal{J}(L)| = 2^r$, können wir schließen $|\mathcal{K}|\mathcal{J}_1| = |\mathcal{K}|\mathcal{J}(L_1)| = 2^{r-1}$, was aufgrund

von (8.9.) mit $I(L_1|\mathcal{K}) = 2^{r-1}$ gleichbedeutend ist.

Wir werden jetzt für den Fall $I(L|\mathcal{K}) < \infty$ Satz (8.10.) verallgemeinern.

(8.15.) Satz: Es gelte (8.12.), dann gibt es zu jedem Ideal $\mathcal{I}_1$ in $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{I}(L) \subset \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{K}$ ein $L_1 \in \mathcal{L}$ mit $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}(L_1)$.

Dabei ist L_1 modulo $\mathcal{K}$ eindeutig bestimmt.

Beweis: 1. Existenz: a) $\mathcal{I}_1$ ist Ideal in $\mathcal{K}$ genau dann, wenn

$\mathcal{I}_1 | \mathcal{I}(L)$ Ideal in $\mathcal{K} | \mathcal{I}(L)$. Nun gilt gemäß (8.14.), Beweisteil 1: $\mathcal{K} | \mathcal{I}(L) \cong \mathcal{Q}$, wo $\mathcal{Q}$ ein Mengenkörper mit endlich vielen Elementen G_i ist. Es bezeichne $\mathcal{J}_1$ das zu $\mathcal{I}_1 | \mathcal{I}(L)$ isomorphe Bild in $\mathcal{Q}$. $\mathcal{J}_1$ wird durch das Element $G' := \sum_{G_i \in \mathcal{J}_1} G_i$ erzeugt, d.h. es ist

$$\mathcal{J}_1 = \{G'G: G \in \mathcal{Q}\}.$$

b) Sei $K_1^+ \mathcal{I}(L)$ die zu G' gehörige Nebenklasse aus $\mathcal{K} | \mathcal{I}(L)$, dann ist $\mathcal{I}_1 | \mathcal{I}(L) = \{(K_1^+ \mathcal{I}(L))(K^+ \mathcal{I}(L)): K \in \mathcal{K}\} = \{K_1 K^+ \mathcal{I}(L): K \in \mathcal{K}\}$.

Weiter schließen wir $\mathcal{I}_1 = \sum_{K \in \mathcal{K}} (K_1 K^+ \mathcal{I}(L))$, woraus $\mathcal{I}_1 = [\mathcal{I}(L), K_1]$ folgt. Anwendung von (8.10.) liefert $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}(L_1)$ mit $L_1 = \overline{L K_1} \in \mathcal{L}$.

2. Eindeutigkeit: Sei $\mathcal{I}(L_1') = \mathcal{I}(L_1)$ wobei $L_1 = \overline{L K_1}$ ist. Da es uns nur auf die Restklasse ankommt, die L_1' enthält, dürfen wir wegen (8.7.) $L_1' = \overline{K_1'} \cdot L$ mit einem geeigneten $K_1' \in \mathcal{K}$ ansetzen. Da

$K_1 L_1 = K_1 \overline{L K_1} = \emptyset \in \mathcal{K}$ und $K_1' L_1' = K_1' \overline{L K_1'} = \emptyset \in \mathcal{K}$ ist, liegen K_1 und K_1' in $\mathcal{I}(L_1) = \mathcal{I}(L_1')$ und damit auch $X := \overline{K_1} + \overline{K_1'}$. Daraus folgt

$\overline{L X} = (\overline{L X})X = (\overline{L_1' + L_1'})X = L_1 X + L_1' X \in \mathcal{K}$ und weiter $X \in \mathcal{I}(L)$, d.h.

$\overline{K_1' + K_1} \in \mathcal{I}(L)$. Es liegen mithin $\overline{K_1'}$ und $\overline{K_1}$ in derselben Restklasse von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{I}(L)$, was nach (8.8.) besagt, daß L_1' und L_1 in derselben Nebenklasse von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$ liegen.

(8.16.) Satz: Es gelte (8.12.) und es seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Ideale in $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{I}(L) \subset \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{K}$. Dann gilt $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}(L_1)$ und

$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}(L_2)$ für passende $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, und es ist

$$K(\{L_1\} + \mathcal{K}) \supset K(\{L_2\} + \mathcal{K}).$$

Beweis: Wir bezeichnen $K(\{L_1\} + \mathcal{K})$ mit $\mathcal{L}_1$ ($i=1,2$). Dann folgt aus Satz (8.15.) und $\mathcal{I}(L) \subset \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{K}$ die Existenz eines $L_1 \in \mathcal{L}$ mit $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}(L_1)$ und $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$. Erneute Anwendung von (8.15.) auf $\mathcal{I}(L_1) \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathcal{K}$ liefert schließlich ein $L_1 \in \mathcal{L}_1$ mit $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}(L_2)$ und $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$.

Wir sind nun in der Lage zu zeigen, daß alle Mengenkörper zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ durch Adjunktion eines Elementes aus $\mathcal{L}$ zu $\mathcal{K}$ gewonnen werden können.

(8.17.) Satz: Unter der Voraussetzung (8.12.) besitzt jeder Mengenkörper $\mathcal{L}^*$ mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ eine Darstellung

$$\mathcal{L}^* = K(\{L^*\} + \mathcal{K}), \text{ wo } L^* \text{ in } \mathcal{L} \text{ passend gewählt ist.}$$

Beweis: $\mathcal{L}^*$ besteht aus der Vereinigung gewisser Nebenklassen

$$L_1 + \mathcal{K} \text{ aus } \mathcal{L} | \mathcal{K}. \text{ Sei etwa } \mathcal{L}^* = \sum_{i=1}^n (L_i + \mathcal{K}), \text{ dann gilt}$$

$$\mathcal{L}^* = K(\mathcal{K} + \sum_{i=1}^n \{L_i\}). \text{ Wir führen eine vollständige Induktion nach}$$

n durch:

$n=1$: ist trivial

$n=2$: Es ist $\mathcal{L}^* = K(\mathcal{K} + \{L_1\} + \{L_2\})$, so daß aus (8.5.) folgt

$\mathcal{I}(\mathcal{L}^*) = \mathcal{I}(L_1) \mathcal{I}(L_2)$. Zum Ideal $\mathcal{I}(\mathcal{L}^*)$ gehöre der gemäß (8.15.) eindeutig bestimmte Mengenkörper $K(\{L^*\} + \mathcal{K})$ mit $\mathcal{I}(\mathcal{L}^*) = \mathcal{I}(L^*) = \mathcal{I}(L_1) \cdot \mathcal{I}(L_2)$. Nach (8.16.) ist dann $K(\{L_1\} + \mathcal{K})$ in $K(\{L^*\} + \mathcal{K})$ enthalten, woraus $\mathcal{L}^* \subset K(\{L^*\} + \mathcal{K})$ folgt. Wir dürfen wieder annehmen $L_1 = L\bar{K}_1$ mit $K_1 \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{I}(L_1) = [\mathcal{I}(L), K_1]$, d.h.

$$\mathcal{I}(L_1) = \{K_1 K + \mathcal{I} : K \in \mathcal{K}, K \in \mathcal{I}(L)\}.$$

Setzen wir nun $\mathcal{I} = \{(K_1 K_2) \cdot K + \mathcal{I} : K \in \mathcal{K}, K \in \mathcal{I}(L)\}$, so finden wir unmittelbar $\mathcal{I}(L_1) \supset \mathcal{I} \supset \mathcal{I}(L)$. Andererseits ist $\mathcal{I} = [\mathcal{I}(L), K_1 K_2]$, so

daß der nach (8.15.) zu $\mathcal{I}$ gehörige Mengenkörper die Gestalt

$$K(\{L(K_1 K_2)\} + \mathcal{K}) = K(\{L\bar{K}_1 + L\bar{K}_2\} + \mathcal{K}) = K(\{L_1 + L_2\} + \mathcal{K}) \text{ besitzt.}$$

Wegen $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}^*$ ist $K(\{L_1 + L_2\} + \mathcal{K})$ in $\mathcal{L}^*$ enthalten. Daraus er-

gibt sich $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}(\mathcal{L}^*)$, während aus $\mathcal{I}(L_1) \supset \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}(\mathcal{L}^*) = \mathcal{I}(L_1) \mathcal{I}(L_2)$

folgt $\mathcal{I}(\mathcal{L}^*) \supset \mathcal{I}$. Es ist somit $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{L}^*)$. Außerdem gilt $K(\{L_1 + L_2\} + \mathcal{K}) \subset \mathcal{L}^* \subset K(\{L^*\} + \mathcal{K})$, woraus mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage von Satz (8.15.) die Behauptung $\mathcal{L}^* = K(\{L^*\} + \mathcal{K})$ folgt.

Der Induktionsschluß bietet nunmehr keine weiteren Schwierigkeiten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= K(\mathcal{K} + \sum_{i=1}^{n+1} \{L_i\}) = K(K(\mathcal{K} + \sum_{i=1}^n \{L_i\}) + \{L_{n+1}\}) = K(K(\{L_1^*\} + \mathcal{K}) + \{L_{n+1}\}) \\ &= K(\mathcal{K} + \{L_1^*\} + \{L_{n+1}\}) = K(\{L^*\} + \mathcal{K}) \text{ wie behauptet.} \end{aligned}$$

Aus den Sätzen (6.5.), (8.13.) und (8.15.) bis (8.17.) folgt direkt

(8.18.) Satz: Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Mengenkörper über M mit $L \subset M$ und $\mathcal{L} = K(\{L\} + \mathcal{K})$, wobei $I(\mathcal{L} | \mathcal{K}) = 2^r < \infty$.

Dann gibt es zu jeder Normalreihe von Mengenkörpern

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{L}_r = \mathcal{L} \text{ mit } I(\mathcal{L}_\rho | \mathcal{L}_{\rho-1}) = 2 \quad (\rho = 1, \dots, r)$$

eine zugehörige Normalreihe von Idealen

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{I}(\mathcal{L}_0) \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{L}_r) = \mathcal{I}(L) \text{ mit} \\ |\mathcal{I}(\mathcal{L}_{\rho-1})| \mid |\mathcal{I}(\mathcal{L}_\rho)| &= 2. \end{aligned}$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Normalreihe von Idealen $\mathcal{I}_\rho$

mit $\mathcal{I}_0 = \mathcal{K}$ und $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}(L)$ eine zugehörige Normalreihe von Mengenkörpern $\mathcal{L}_\rho$ mit der Eigenschaft $\mathcal{I}(\mathcal{L}_\rho) = \mathcal{I}_\rho$.

Wir haben also ähnliche Verhältnisse wie beim "Hauptsatz der Galoistheorie" endlicher Körpererweiterungen vor uns. Ebenso stellt Satz (8.17.) ein Analogon zum "Satz vom primitiven Element" dar, wobei wir allerdings voraussetzen, daß der Erweiterungskörper $\mathcal{L}^*$ von $\mathcal{K}$ in einem durch ein einziges Element L erzeugten Mengenkörper $\mathcal{L} = K(\{L\} + \mathcal{K})$ eingebettet ist. Die Notwendigkeit dieser Voraussetzung ersehen wir aus folgendem Beispiel: Sei $\mathcal{K} = \{\emptyset, M\}$ mit $|M| > 2$. Dann gilt für jedes $L \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{K}$ die

Beziehung $\mathcal{L} = {}^K(\{L\} \dot{+} \mathcal{K}) = \{\emptyset, M, L, \bar{L}\}$. Zu $\mathcal{L}^* = {}^K(\{L_1, L_2\} \dot{+} \mathcal{K})$, wobei $L_1, L_2 \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{K}$ mit $L_1 \neq L_2 \neq \bar{L}_1$, existiert mithin kein L^* derart, daß $L_1, L_2 \in \{\emptyset, M, L^*, \bar{L}^*\}$, d.h. es gibt kein "primitives Element" L^* zu L_1 und L_2 .

Der tiefere Grund für die Nichtexistenz eines solchen Elementes L^* ist die Tatsache, daß für jedes $L \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{K}$ gilt $|\mathcal{K}| \cap \mathcal{J}(L)| = 2$. Alle L haben daher den Index 2 über $\mathcal{K}$, so daß es zu zwei Elementen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^* - \mathcal{K}$, die verschiedenen Nebenklassen von $\mathcal{L}^* | \mathcal{K}$ angehören, kein L^* mit $L_1, L_2 \in {}^K(\{L^*\} \dot{+} \mathcal{K})$ geben kann. Für diesen Fall haben wir das Kriterium

(8.19.) Satz: Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ Mengenkörper über M mit $\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{L}$ und sei $L_0 \in \mathcal{L} - \mathcal{K}$ mit $I(L_0 | \mathcal{K}) = 2$, dann gilt:
 $I(L | \mathcal{K}) = 2$ für alle $L \in \mathcal{L} - \mathcal{K}$ genau dann, wenn $\mathcal{J}(L_0)$ ein Ideal in $\mathcal{L}$ ist.

Beweis: 1. Die Bedingung ist hinreichend:

Sei $L \in \mathcal{L} - \mathcal{K}$ und K beliebig aus $\mathcal{K}$, dann ist, falls K in $\mathcal{J}(L_0)$ liegt, $LK \in \mathcal{J}(L_0)$ und demnach $LK \in \mathcal{K}$. Im Fall $K \notin \mathcal{J}(L_0)$ dagegen ist nach Satz (7.4.) $\bar{K}L_0 \in \mathcal{K}$, d.h. $\bar{K} \in \mathcal{J}(L_0)$, und daher $L\bar{K} \in \mathcal{J}(L_0)$, was $L\bar{K} \in \mathcal{K}$ bedeutet. Aus Satz (7.4.) folgt deshalb $I(L | \mathcal{K}) = 2$.

2. Die Bedingung ist notwendig:

Wir nehmen an, es sei $I(L | \mathcal{K}) = 2$ für alle $L \in \mathcal{L} - \mathcal{K}$ und $\mathcal{J}(L_0)$ sei kein Ideal in $\mathcal{L}$. Dann gibt es ein $L' \in \mathcal{L}$ und ein $X \in \mathcal{J}(L_0)$ mit $L'X \notin \mathcal{J}(L_0)$. $L'X$ kann nicht in $\mathcal{K}$ liegen; denn da $\mathcal{J}(L_0)$ Ideal in $\mathcal{K}$ ist, gilt mit $L'X \in \mathcal{K}$ auch $L'X = (L'X)X \in \mathcal{J}(L_0)$, was ausgeschlossen wurde. Aus $L'X \notin \mathcal{K}$ schließen wir vermöge (7.4.) $L'\bar{X} \in \mathcal{K}$. Weiter ist wegen $X \in \mathcal{J}(L_0)$ definitionsgemäß $XL_0 \in \mathcal{K}$, woraus nach (7.4.) folgt $L_0\bar{X} \notin \mathcal{K}$. Aus $L'\bar{X}, L_0X \in \mathcal{K}$ und $L'X, L_0\bar{X} \notin \mathcal{K}$ resultiert nun $(L_0^+L')X \notin \mathcal{K}$ und $(L_0^+L')\bar{X} \notin \mathcal{K}$, was wegen $L_0^+L' \in \mathcal{L}$ und (7.4.) der Voraussetzung $I(L | \mathcal{K}) = 2$ für alle $L \in \mathcal{L} - \mathcal{K}$ entgegensteht.

Abschließend wollen wir und davon überzeugen, daß Satz (8.17.) falsch wird, wenn wir die Voraussetzung $I(L|\mathcal{K}) < \infty$ weglassen: Wir nehmen $\mathcal{K}_0$ wie im Beispiel zur Definition (6.6.) und $L:=Z$. Dann haben wir $K(\{L\} + \mathcal{K}_0) = \mathcal{P}(M)$; denn es ist $X_1 + (-X_2) = L(X_1 + (-X_1)) + \bar{L}(X_2 + (-X_2))$ für beliebige $X_i \in \mathcal{P}(Z)$. Sei weiter $\mathcal{L}^*$ der in (2.3.) mit $\mathcal{K}$ bezeichnete Mengenkörper, dann ist $\mathcal{K}_0 \subsetneq \mathcal{L}^* \subsetneq K(\{L\} + \mathcal{K}_0)$, und es existiert kein L^* mit $\mathcal{L}^* = K(\{L^*\} + \mathcal{K}_0)$. Gäbe es nämlich ein solches L^* , so müßte für beliebiges $r \in Z$ genau eines der Elemente r oder $-r$ in L^* liegen, da $\{r\} \in \mathcal{L}^*$ ist. Mit $X_0 := \{x: -x \in L^*\}$ ist aber $L^{*+}(X_0 + (-X_0)) = L \in \mathcal{L}^*$, was wegen $\mathcal{L}^* \subsetneq K(\{L\} + \mathcal{K}_0)$ nicht möglich ist.

9. Zusammenfassung:

Es seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{M}$ Mengenkörper über M mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K}$, dann heißt $\mathcal{M}$ maximal bezüglich $\mathcal{K}$, wenn es keinen Mengenkörper $\mathcal{L}$ mit $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{K}$ gibt. Es gelten die Sätze:

1. Jeder nichttriviale Mengenkörper $\mathcal{K}$ enthält maximale Untermengkörper;
2. Zu den Mengenkörpern $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ über M mit $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{K}$ und jedem A aus $\mathcal{K} - \mathcal{L}$ gibt es einen bezüglich $\mathcal{K}$ maximalen Untermengkörper $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{K}$ und $A \notin \mathcal{M}$.

Anwendung dieser Existenzsätze auf die Theorie der Mengenkörpererweiterung liefert

3. Es gibt gewöhnliche Mengenkörper $\mathcal{K}$ über M derart, daß die Adjunktion eines beliebigen $A \in \mathcal{P}(M) - \mathcal{K}$ einem σ -Körper ergibt, sofern $|M| = \infty$.

Zum Mengenkörper $\mathcal{K}$ über M und $L \subset M$ definieren wir $I(L|\mathcal{K})$ als Index von $\mathcal{L} := K(\{L\} + \mathcal{K})$ nach $\mathcal{K}$, wobei $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ als Abelsche

Gruppen bezüglich der Unterschiedsrelation aufgefasst werden. Weiter seien $\mathcal{I}(\mathcal{L}) := \{X \in \mathcal{K} : XL \in \mathcal{K}\}$ das L zugeordnete Ideal in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{I}(\mathcal{L}) := \prod_{L \in \mathcal{L}}^* \mathcal{I}(L)$ das $\mathcal{L}$ zugeordnete Ideal. Dann gilt

$$4. I(L|\mathcal{K}) = |\mathcal{K}| \mathcal{I}(L) ;$$

und unter der zusätzlichen Voraussetzung $I(L|\mathcal{K}) < \infty$ haben wir die Sätze

5. Jeder Mengenkörper $\mathcal{L}^*$ mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ besitzt eine Darstellung $\mathcal{L}^* = K(\{L^*\} + \mathcal{K})$ bei geeignetem $L^* \in \mathcal{L}$;

und

6. Zu jeder Normalreihe von Mengenkörpern

$$\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \subsetneq \mathcal{L}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{L}_r = \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad |\mathcal{L}_p|\mathcal{L}_{p-1}|=2$$

gibt es eine zugehörige Normalreihe von Idealen

$$\mathcal{K} = \mathcal{I}(\mathcal{L}_0) \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{L}_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{I}(\mathcal{L}_r) = \mathcal{I}(\mathcal{L}) \text{ mit}$$

$$|\mathcal{I}(\mathcal{L}_{p-1})|\mathcal{I}(\mathcal{L}_p)| = 2.$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Normalreihe von Idealen $\mathcal{I}_p$ mit

$\mathcal{I}_0 = \mathcal{K}$ und $\mathcal{I}_r = \mathcal{I}(\mathcal{L})$ eine zugehörige Normalreihe von Mengenkörpern $\mathcal{L}_p$ mit der Eigenschaft $\mathcal{I}(\mathcal{L}_p) = \mathcal{I}_p$.

Literaturverzeichnis:

- [1] G. Aumann: Reelle Funktionen, Springer-Verlag 1954
- [2] H. Richter: Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag 1956

Lebenslauf

Am 1. März 1938 wurde ich als zweites der vier Kinder des Rechtsanwaltes Horst Mammitzsch und seiner Ehefrau Ingeborg geb. Werner in Leipzig geboren.

Vom Herbst 1944 bis zum Sommer 1951 besuchte ich die achtklassige Grundschule in Zwenkau bei Leipzig. Anschließend begann ich eine Lehre als Betriebselektriker, die ich im Februar 1954 mit der Gesellenprüfung abschloß.

Nach meiner Übersiedelung nach München trat ich im September 1954 in die 7. Klasse der hiesigen Gisela-Oberrealschule ein, an der ich im Sommer 1957 die Reifeprüfung ablegte. Vom Wintersemester 1957/58 bis zur Ablegung des Staatsexamens für das Lehramt an Höheren Schulen im Herbst 1963 studierte ich Mathematik und Physik an der Universität München. Ich hörte hier Vorlesungen bei den Professoren G. Aumann, D. Bierlein, F. Bopp, A. Faessler, E. Heinz, M. Kneser, H. Koppe, H. Richter, W. Rollwagen, K. Seebach, W. Stegmüller, K. Stein, K. Vogel u. a.

Seit dem Wintersemester 1961/62 verwalte ich am Mathematischen Institut der Universität München eine wissenschaftliche Assistentenstelle. Am 1. April 1964 wurde ich hier zum wissenschaftlichen Assistenten ernannt.

München, den 29. April 1964

Volker Mammitzsch

